Шифр: 9-06

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2019/2020
Ленинградская область

Район Киришский

Школа МОУ „Киришский лицей"

Класс 9а

ФИО Ястребов Григорий Дмитриевич

Лист 1

9-06

1	2	3	4	5	Σ
7	4	7	0	0	18

~~№1~~ 9.1 Решение: сначала заметим, что на неч. минуте кол-во куч будет равно 11 (т.к. от деления + 1 куча), а на чёт. минуте – 10 (т.к. ~~либо это~~ две кучи совмещаются, – 1 куча). Поэтому разделение на кучи с равным кол-вом конф. в каждой может произойти только на неч. минуте (всего конфет 55, $55 \not\vdots\ 10$).

Теперь пример того, что это может случиться:

1-ая минута: куча с 10 конфетами делится на две по 5.

~~2-ая: куча с n~~

А далее:

2k-ая минута: куча с n конф. объединяется с кучей из 10 – n конфет. ~~Итого n+(10-n)~~

Итого $n + (10 - n) = 10$ конфет.

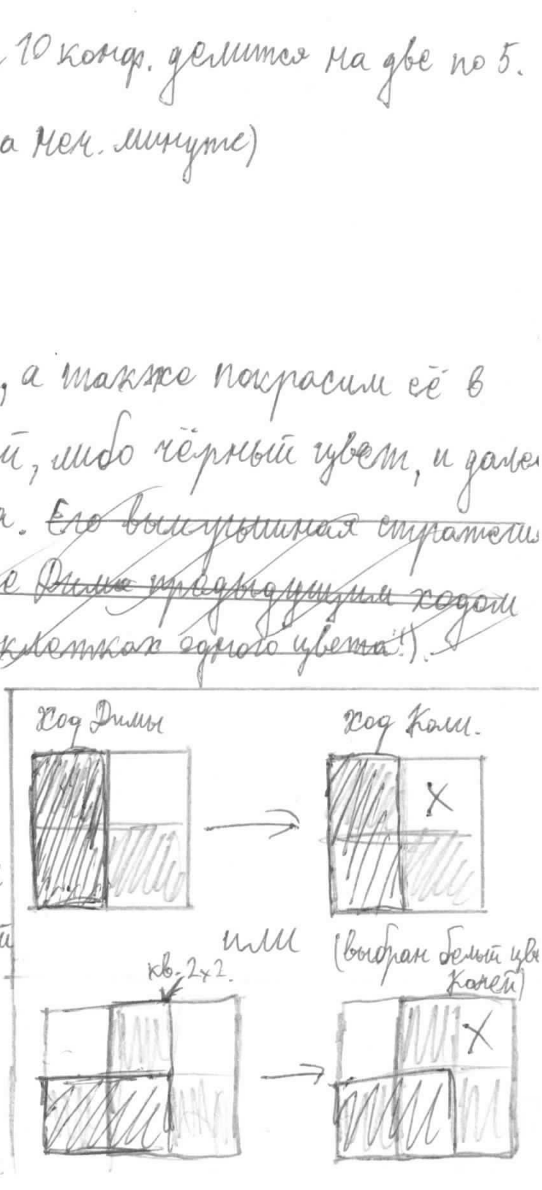
2k+1 минута: получившаяся пред. минутой куча из 10 конф. делится на две по 5.

И т. д., пока во всех 11 кучах не будет 5 конфет (на неч. минуте)

Ответ: да, может.

9.3 Ответ: ~~Дима~~ Коля

Решение: разобьём всю доску на 16 квадратов 2×2, а также покрасим её в шахматную раскраску. Коля выбирает либо белый, либо чёрный цвет, и далее ставит крестики только на клетки этого цвета. ~~Его выигрышная стратегия ставить крестик в том же квадрате 2×2, что и где Дима предыдущим ходом поставил доминошку (обязательно все крестики ставящиеся на клетках одного цвета!).~~



Дима никогда не сможет закрыть одним ходом две клетки одного цвета (по усл.), поэтому у Коли

Выигрышная стратегия Коли: ставить крестик в том же квадрате 2×2, где Дима закрыл доминошкой клетку выбранного Колей цвета.

У Коли всегда будет возможность хода, т.к. Дима не сможет закрыть за 1 ход обе клетки одинакового цвета (по усл. доминошка закрывает кл. соседние

Продолжение 9.3

клетки). А вот Дима в некоторый момент не сможет походить, т.к. доминошка всегда закрывает на шахм. раскраске 1 б и 1 ч цвета, а за каждую пару ходов (1 ход Димы и 1 ход Коли) ~~один за цвет закрывается~~ кол-во свободных клеток одного цвета будет уменьшаться в 2 раза быстрее, чем клеток другого цвета. Тем самым, к какому-то моменту именно Коля закрасит ~~клетку~~ последнюю свободную клетку одного цвета (т.к. ~~за каждую пару ходов закрывается~~ за каждый второй ход в игре закрывается чёт. кол-во кл. одного цвета, а их общее кол-во — 32 - чётное, и второй ход всегда совершает Коля).

9.4. Метод от противного, пусть $py+1 = mn$, где $m \in \mathbb{Z}$, $m > y$; $n \in \mathbb{Z}$, $n > y$.
Тогда $mn > y^2$, значит $py+1 > y^2$.
$py > y^2 - 1$

9.2. Для того, чтобы n было наибольшим, нужно, чтобы разница между соседними числами в ряду была минимальной (т.е. по усл. равнялась 10).

Заметим, что три наименьших числа не могут ~~все превосходить~~ быть меньше -1000 (тогда их квадраты будут все больше 10^6, а сумма больше $3 \cdot 10^6$, (!)). Аналогично ~~три наибольших все~~ каждое из 3-ёх наибольших не больше 1000. Из этого в ряду $k_1, k_2, k_3, \dots, k_{n-2}, k_{n-1}, k_n$. k_3 хотя бы -999 или больше, а k_{n-2} хотя бы 999 или меньше. ~~Но тогда~~

Также $k_2 > -1000$ и $k_{n-1} < 1000$, т.к. $(\pm 1010)^2 + (\pm 1000)^2 + (\pm 990)^2 > 3 \cdot 10^6$, зн. только $k_1 < -1000$ и $k_n > 1000$.

Тогда на промежутке от -999 до 0 с мин. разницей между соседними можно разместить только 99 чисел, аналогично от 0 до 999, плюс ещё k_1 и k_n.
Итого — 200 чисел.

Пример: $-1005, -995, -985, \dots, -5, 5, 15, \dots, 985, 995, 1005$.

Ответ: 200 чисел.

Шифр: 2-9-16

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2019/2020
Ленинградская область

Район Киришский

Школа МОУ „Киришский Лицей"

Класс 9а

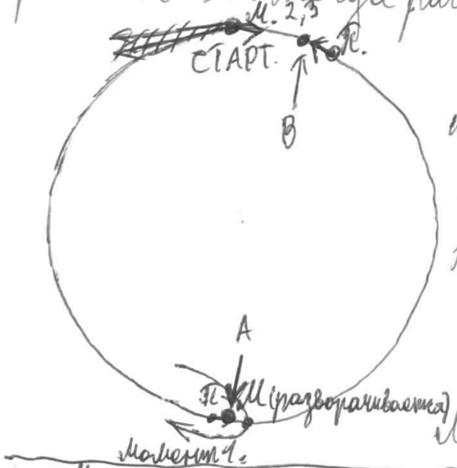
ФИО Ястребов Григорий Дмитриевич

Лист 1

2-9-16

6	7	8	9	10	Σ
7	6	0	0	0	13

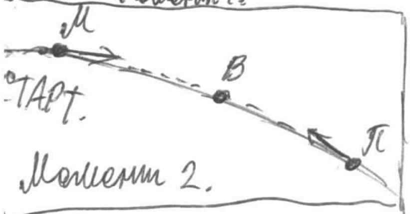
9.6. Обозначим X за половину круга. По усл. Миша может развернуться, если пробежал $\geq x$. Тогда рассматриваем 3 момента встречи Миши и Пети:



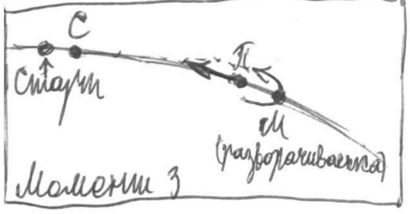
1. Как только Миша пробегает x, он разворачивается и бежит по час. стрелке. Петя к этому моменту пробежал только $\frac{x}{1,02} < x$, зн. на пути Миши по ч. стр. он встретится с Петей в точке А.

2. Миша бежит по час. стр. X, Петя пробегает $\frac{2x}{1,02} = \frac{x}{0,51} < 2x$
(то есть он на точке старта).
(Ещё не пробежал круг)

Миша продолжает бежать по час. стр. и встречается с Петей в точке В ~~(т.е. когда Петя пробежал~~ $\cancel{\frac{2x}{1,02} + \frac{2x-\frac{2x}{1,02}}{1+1,02} > \frac{2x}{1,02} + \frac{0,04x\cdot 2,02}{1,02} = 2,04x \cdot 2,02}$ (Петя круг не пробегает)



3. Миша продолжает бежать по час. стр. после встречи с Петей столько, ~~чтобы~~ сколько необходимо для того, чтобы успеть обогнать Петю у точки старта (в точке С) (т.е. до того, как Петя успеет пробежать круг)



№9.7. Ответ: 1010.

Решение: сначала заметим, что никакие два зелёных хамелеона не могут быть "соседями" в очереди на ответ (т.е. не могут отвечать друг после друга), иначе они назовут одинаковое число (потому что между ~~их~~ их ответами ничего не происходило, коричневых хамелеонов не стояло, значит перекрасок и увеличения числа зелёных не было), что противоречит факту в условии о том, что все числа были названы по разу.

Таким образом, между каждой парой зелёных хамелеонов должно стоять некоторое количество коричневых, чтобы они, ответив, изменили цвет, и следующий зел. хам. назвал число больше, чем предыдущий.

Получаем пример с 1010 зелёными хамелеонами: з к з к з к ... к з
зелёные хамелеоны — з, коричневые — к, снизу — что ответили: "1010" "1" "1011" "2" "1012" "3" "1009" "2019"

~~К~~ Если мы захотим поставить больше 1010 з. хам., то нам обязательно

(См. след. лист)

2-9-16 Лист 2

Продолжение 9.7.

... потребуется убрать какого-нибудь коричневого, что невозможно, так как тогда 2 з. хам. станут "соседями" в череди. Если мы заменим коричневого зелёным, то тогда соседями будут 3 з. хам.(?!)

9.9. Ответ: нет, не можем.

Решение: ~~во-первых~~, заметим, что у любого многоугольника количество сторон равно количеству вершин. Ну действительно, возьмём произвольный n-угольник, выберем на нём произвольную вершину и начнём ходить ~~во одну~~ по 1 разу во одном направлении по всем сторонам. и начнём считать кол-во вершин, начиная с ~~последн~~ начальной. Т.к. наша фигура замкнута, и из одной вершины всегда выходят только 2 стороны, у нас всегда будет только 1 вариант движения (из 1 стороны в 1 вершину). Тогда, так как фигура конечная, мы вернёмся в начальную вершину (её не считаем, она уже подсчитана). Тем самым, пройдя n сторон, мы пройдём через n вершин, зн. их кол-во равно, ч.т.д.

Я утверждаю, что все многоугольники с одинаковым для всех неч. кол-вом сторон, отсечённые непересекающимися диагоналями в правильном n-угольнике, будут выпуклыми①, и среди них не найдётся ни одн хороший②

Док-во: ① МОП. Пусть найдётся такой невыпуклый многоугольник. Тогда внешняя полуплоскость, образованная какой-либо стороной этого многоугольника, будет содержать элементы ~~пересечёт другую сторону~~ этого многоуг. Такой стороной может быть либо одна из проведённых диагоналей в n-угольнике, либо самой стороной n-угольника (никаких других сторон многоугольника по усл. нет). Но самой стороной n-угольника эта полуплоскость быть не может (т.к. сам n-угольник правильный, а значит выпуклый), а ~~продолжение~~ ~~диагональ пересекает либо~~ ~~саму~~ другую ~~диагональ~~ ~~(?! потс либо сторону n-угольника (?!, т.к.~~ (противоречие) в полупл., обр. диагональю, будет содержаться либо другая диагональ (~~?!, т.к.~~ значит они пересекаются (?!)), либо сторона n-угольника (что тоже невозможно, т.к. диагонали всегда проходят через вершины n-угольника)

~~② Имеется ввиду, что любой выпуклый 2k+1 угольник не будет хорошим.~~ многоуг. с неч. кол-вом сторон
~~МОП. Пусть найдётся такой 2k+1 угольник. Так~~

② Рассмотрим такой многоугольник. МОП. Пусть в нём найдутся параллельн стороны. Т.к. многоуг. замкнутый, эти стороны должно соединять некоторое количество сторон. ~~Но.~~ ~~Но с разных сторон это~~ Но с одной стороны будет неч кол-во сторон (где-то больше, чем в другой), а с другой чёт. Но т.к. хотя бы одна сторона принадлежит правильному n-угольнику,